
Un modelo de duración trifactorial

Sonia BENITO MUELA*

Departamento de Análisis Económico II

UNED

Instituto Complutense de Análisis Económico
(ICAE)

Resumen: En este trabajo se propone un modelo de factores de la estructura temporal basado en el análisis de regresión. A partir del modelo propuesto, es posible obtener un vector de duración tridimensional, cuyos componentes miden la sensibilidad de los precios de los bonos a cambios en el nivel, la pendiente y la curvatura de la ETTI. Se desarrolla también un nuevo método para seleccionar los tipos de interés que mejor explican el comportamiento de la estructura temporal. El método propuesto consiste en seleccionar aquellos tipos de interés que estando altamente correlacionados con los tres primeros componentes principales de los cambios en la ETTI, mantienen entre sí una menor correlación.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se han desarrollado nuevos instrumentos para la gestión del riesgo de interés de activos de renta fija. El desarrollo de tales instrumentos se ha producido de forma paralela a los avances que a nivel teórico y empírico se están produciendo en el estudio de la Estructura Temporal de Tipos de Interés (ETTI), y sobre todo, con aquellos relacionados con el estudio de factores comunes en la ETTI y los métodos desarrollados para su estimación.

Tradicionalmente, la medida utilizada para la gestión del riesgo de interés de activos de renta fija era la duración de Fisher y Weil (1971). Esta medida recoge cuan sensible es el precio de una referencia del mercado ante cambios uniformes en los tipos de interés, es decir, ante desplazamientos exclusivamente paralelos de la ETTI. Su propia definición hace que esta medida presente una limitación importante, ya que, como se ha puesto de manifiesto en algunos trabajos empíricos (véase Gomez y Novales (1997)), muchos de los cambios que se suceden en la ETTI distan de ser de carácter paralelo.

Ello ha hecho necesario el desarrollo de nuevas medidas de duración que permitan cuantificar de forma más precisa cuan sensible es el precio de una referencia a los distintos cambios que puedan producirse en la estructura temporal. Las distintas medidas de duración desarrolladas para la gestión del riesgo de interés de un activo de renta fija parten todas ellas de una filosofía común: la alta correlación observada entre los tipos de interés a distintos plazos, hace plausible que el comportamiento dinámico de la estructura temporal pueda ser representado a partir de un número reducido de variables o factores. Bajo este supuesto las nuevas medidas de duración desarrolladas tratan de medir cuan sensible es el precio de una referencia a cambios en cada una

* Me gustaría dar las gracias a Alfonso Novales, a Eva Ferreira y a los evaluadores anónimos del trabajo por los comentarios y sugerencias realizadas. Agradezco también el apoyo financiero recibido del Ministerio de Ciencia y Tecnología, BEC2003-03965. Todos los errores cometidos son responsabilidad exclusiva de la autora. Correo electrónico: soniabm@ccee.ucm.es y soniabm@cee.uned.es

de las variables o factores que guían el comportamiento de la ETTI. Cabe decir por tanto que habrá tantas medidas o modelos de duración como modelos explicativos de la ETTI haya.

En base a la metodología utilizada para su construcción, podemos hablar de modelos de regresión (Elton, Gruber y Michaely (1990), Navarro y Nave (1997), Navarro y Nave (2001)), modelos paramétricos (Chambers y Carleton (1988), Chambers, Carleton y McEnally (1988) y Gómez (1999)), modelos de componentes principales (Barber y Copper (1996) y Litterman y Scheinkman (1991)) y modelos de equilibrio estocástico (Vasicek (1977), Cox, Ingersoll y Ross (1985) y Moreno (1997)). Para una visión global de estos modelos véase Soto (2001).

La ventaja de trabajar con modelos en tiempo continuo, como son los modelos de equilibrio estocástico, es que permiten obtener expresiones cerradas de los precios de los bonos, las cuales pueden ser utilizadas para la valoración de activos derivados. El inconveniente de estos modelos es que son muy costosos de implementar, lo que dificulta su difusión fuera del ámbito académico. Además, dado que en estos modelos se trabaja generalmente con dos variables (o, en su defecto solamente una) el ajuste de los tipos de interés no es demasiado bueno. Además, los vectores de duración derivados de estos modelos no capturan la sensibilidad de los precios a cambios en la curvatura de la ETTI.

Frente a los modelos de equilibrio estocástico, los modelos de componentes principales, los modelos paramétricos y los modelos de regresión, tienen la ventaja de que son muy fácilmente implementables. Estos últimos, tienen la ventaja adicional de que en ellos las variables explicativas de la ETTI son directamente observables, lo que facilita su uso de cara a la gestión activa del riesgo de interés. No todos los modelos comparten esta característica. Los modelos de componentes principales y los modelos paramétricos, superan en muchos aspectos a los modelos de regresión, pero tienen la desventaja de que en ellos las variables explicativas de la ETTI no son directamente interpretables, lo que hace que sean algo menos intuitivos.

En este trabajo proponemos un modelo de factores de la Estructura Temporal de Tipos de Interés, a partir del cual es posible obtener un vector de duración tridimensional, cuyos componentes miden la sensibilidad de los precios a cambios en el nivel, la pendiente y la curvatura de la ETTI. El modelo propuesto presenta conjuntamente una serie de ventajas: a) es flexible, en el sentido de que explica una gran variedad de cambios en la ETTI; b) fácil de implementar, ya que se basa en el análisis de regresión y c) depende de variables observables, lo que facilita su uso de cara a la gestión activa del riesgo de interés.

Se desarrolla también un nuevo método para seleccionar cuales son los tipos de interés que mejor explican el comportamiento de la estructura temporal. El método propuesto consiste en seleccionar aquellos tipos de interés y/o diferenciales de tipos de interés, que estando altamente correlacionados con los tres primeros componentes principales de los cambios en la ETTI, que son las variables que mejor explican la información contenida en la curva de tipos, mantienen entre sí una menor correlación.

El resto del trabajo se organiza como sigue. En la sección 2, describimos la metodología empleada para la construcción del modelo de duración propuesto en este trabajo. En la sección 3 presentamos los resultados obtenidos al aplicar dicha metodología sobre un amplio conjunto de tipos de interés de la deuda española. En la sección 4, calculamos los vectores de duración y evaluamos la capacidad de los mismos para explicar los cambios en los precios de la deuda española. Por último, en la sección 5 presentamos las principales conclusiones del trabajo.

2. METODOLOGÍA

En este trabajo presentamos un modelo de factores de la estructura temporal basado en el análisis de regresión. A partir del modelo propuesto derivamos un modelo de duración trifactorial

rial cuyos componentes miden la sensibilidad del precio de un bono a cambios en el nivel, la pendiente y la curvatura de la ETTI.

Para la construcción del modelo propuesto se supone que los tipos de interés pueden ser explicados adecuadamente por tres variables o factores, tal y como se recoge en (1):

$$r_{i,t} = \phi_i^{f1} f_{1,t} + \phi_i^{f2} f_{2,t} + \phi_i^{f3} f_{3,t} + \mu_{i,t} \quad (1)$$

donde $r_{i,t}$ representa el tipo de interés cupón cero a plazo i y $f_{1,t}$, $f_{2,t}$ y $f_{3,t}$ son los tres factores desconocidos que supuestamente explican el comportamiento de la ETTI. De acuerdo con el modelo (1), los cambios en los tipos de interés pueden ser explicados por los cambios en los tres factores desconocidos,

$$dr_{i,t} = \phi_i^{f1} df_{1,t} + \phi_i^{f2} df_{2,t} + \phi_i^{f3} df_{3,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (2)$$

donde $r_{i,t}$ representa el cambio del tipo de interés a plazo i en el intervalo temporal $[t-1, t]$ $df_{1,t}$, $df_{2,t}$, $df_{3,t}$ denotan el cambio en ese intervalo temporal de los tres factores desconocidos. Los coeficientes ϕ_i^{f1} , ϕ_i^{f2} , ϕ_i^{f3} recogen la sensibilidad del tipo de interés a plazo i a cambios en los tres factores desconocidos. ε_i es un término de error que suponemos tiene media cero y varianza constante.

De acuerdo con el modelo (2) el cambio en el precio del bono j puede expresarse aproximadamente como la suma de tres componentes, tal y como se recoge en (3):

$$\frac{dp_t^j}{p^j} \approx -D_{t,f1}^j df_{1,t} - D_{t,f2}^j df_{2,t} - D_{t,f3}^j df_{3,t} \quad (3)$$

donde $D_{t,f1}^j$, $D_{t,f2}^j$ y $D_{t,f3}^j$ son los tres componentes del vector de duración propuesto y se calculan como:

$$D_{t,f1}^j = -\frac{1}{p^j} \sum_{i=1}^k \frac{\partial p_t^j}{\partial r_{i,t}} \phi_i^{f1}$$

$$D_{t,f2}^j = -\frac{1}{p^j} \sum_{i=1}^k \frac{\partial p_t^j}{\partial r_{i,t}} \phi_i^{f2}$$

$$D_{t,f3}^j = -\frac{1}{p^j} \sum_{i=1}^k \frac{\partial p_t^j}{\partial r_{i,t}} \phi_i^{f3}$$

donde: k es el número de pagos que le restan al bono hasta la fecha de su amortización. Los coeficientes ϕ_i^{f1} , ϕ_i^{f2} y ϕ_i^{f3} miden respectivamente la sensibilidad del tipo de interés i a plazo a cambios en los tres factores desconocidos para $i=1,2,\dots,k$. Estos coeficientes se obtienen al estimar el modelo (2).

Para calcular los componentes del vector de duración es necesario buscar previamente variables que aproximen los factores desconocidos.

Siguiendo a Elton, Gruber y Michaely (EGM)(1990) en este trabajo utilizamos como proxies de los factores desconocidos algunos tipos de interés a unos plazos clave y algunos diferenciales de tipos de interés. Estos autores desarrollaron una metodología para determinar cuales son los tipos de interés que mejor explican el comportamiento de la curva de tipos.

En el contexto de un modelo univariante (ver modelo 4) el procedimiento propuesto por estos autores consiste en elegir el tipo de interés que minimiza la varianza de los errores de regresión (modelo (4)). Este criterio es equivalente a maximizar la siguiente expresión:

$$\sum_i w_i R_{i(x)}^2 \text{Var}(dr_{i,t})$$

donde w_i representa la importancia relativa asignada por el analista a la explicación del tipo de interés a plazo i , $\text{Var}(dr_{i,t})$ representa la varianza de los cambios no esperados en el tipo de interés a plazo i y $R_{i(x)}^2$ es el coeficiente de determinación del modelo (4):

$$dr_{i,t} = a_i dr_{x,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (4)$$

En este trabajo las proxies de los tres factores desconocidos han sido seleccionadas utilizando una metodología diferente. Dicha metodología consiste en elegir aquellas variables (tipos de interés, diferenciales de tipos de interés y diferenciales de pendientes) que estando altamente correlacionadas con los tres primeros componentes principales de los cambios en la ETTI, mantienen entre sí una menor correlación. Los tres primeros componentes principales de los cambios en la ETTI son variables que se constituyen como combinaciones lineales de los cambios en los tipos de interés a distintos plazos. El peso que cada tipo de interés tiene en la composición de los componentes principales se determina mediante técnicas de optimización. El lector interesado puede consultar el apéndice I para ver en qué consiste esta metodología.

Con este criterio lo que estamos haciendo básicamente es buscar proxies de los tres primeros componentes principales de los cambios en la curva de tipos. La razón por la cual buscamos proxies de los componentes principales es porque, como se ha puesto de manifiesto en muchos trabajos empíricos, estas variables explican un porcentaje muy elevado de los cambios en la estructura temporal, por lo que se puede decir que resumen de forma óptima la información contenida en la ETTI.

El problema de estas variables es que al constituirse como combinaciones lineales de los cambios en los tipos de interés no son fácilmente interpretables. Por ello buscamos variables que se comporten de forma similar a los componentes principales pero que además sean variables observables y fácilmente interpretables.

Como veremos en la siguiente sección hay algunos tipos de interés, algunos diferenciales de tipos de interés y algunos diferenciales de pendientes¹, que replican de forma casi perfecta el comportamiento de los componentes principales. Entre todos ellos elegiremos como proxies aquellos que mantienen entre sí una menor correlación. La razón por la cual buscamos proxies que no estén correlacionadas entre sí, es doble. Por un lado, para evitar los problemas de ineficiencia que surgen al estimar un modelo de regresión cuando las variables explicativas del modelo están correlacionadas, y por otro, para garantizar que los componentes del vector de duraciones derivado de dicho modelo midan de forma precisa la sensibilidad de los precios a cambios en las variables explicativas. La presencia de correlación en las variables explicativas del modelo de factores podría introducir algún tipo de sesgo en los componentes del vector de duración lo que haría más difícil su interpretación.

1 El concepto de pendiente hace referencia a un diferencial (spread) de tipos de interés a distintos plazos. Al hablar de diferencial de pendientes nos estamos refiriendo a una diferencia de diferenciales.

Para seleccionar las proxies de los tres factores desconocidos implementando la metodología propuesta en este trabajo es necesario llevar a cabo un análisis en tres etapas: primero se estiman los tres primeros componentes principales del conjunto de tipos de interés que se quieren explicar. Como mostraremos en la siguiente sección, el peso que los tipos de interés tienen en la composición de los tres primeros componentes principales, sugiere que estos mantienen una elevada correlación con unos tipos de interés a unos plazos determinados, algunos diferenciales de tipos de interés y algunos diferenciales de pendientes. En base a esta observación, proponemos una segunda etapa en la que se analizarán las correlaciones contemporáneas entre los tres primeros componentes principales y un conjunto relativamente amplio de tipos de interés, algunos diferenciales de tipos y algunos diferenciales de pendientes.

Entre todas las variables que mantienen una correlación elevada con los tres primeros componentes principales de los cambios en la ETTI, se elegirán aquellas que mantienen entre sí una menor correlación. Para ello, proponemos una tercera etapa de análisis en la que se analizarán las correlaciones contemporáneas entre los candidatos a ser identificados con el primer, segundo y tercer componente principal.

3. UNA APLICACIÓN AL MERCADO ESPAÑOL DE DEUDA PÚBLICA

3.1. Búsqueda de las proxies de los factores desconocidos

En esta sección presentamos los resultados empíricos obtenidos al aplicar la metodología descrita en la sección anterior sobre un amplio conjunto de tipos de interés de la deuda pública española. Dicho estudio se ha realizado sobre tipos de interés cupón cero a 14 plazos distintos, que son: 1 mes, 3, 6 y 9 meses, 1 año, 2 años 3 años, y el resto de los plazos anuales hasta 10 años.

El período muestral analizado se extiende desde el 4 de enero de 1999 hasta el 31 de diciembre de 2002. En dicho período se han calculado las variaciones semanales de los tipos de interés para los 14 plazos considerados. Sobre las series obtenidas se ha llevado a cabo un estudio de componentes principales cuyos resultados se comentan a continuación.

En la tabla 1, se presentan los cinco primeros autovalores de la matriz de varianzas y covarianzas de las variaciones semanales de los 14 tipos de interés considerados.

Tabla 1
Análisis de autovalores

Autovalores	Varianza Explicada	Varianza Explicada Acumulada
0.11	66.64	66.64
0.04	26.88	93.52
0.01	4.81	98.33
0.00	1.64	99.97
0.00	0.03	100.00

El primer componente principal explica el 66.64% de la variabilidad total de las variaciones semanales de los tipos de interés, el segundo componente explica el 26.88% de dicha variación, y el tercer componente principal el 4.81%. De esta forma conjuntamente los tres primeros componentes principales explican algo más del 98% de la variabilidad total de los cambios en la ETTI.

En el gráfico 1, presentamos los coeficientes que recogen el efecto que los tres primeros componentes principales tienen sobre la estructura temporal española en los 14 plazos considerados. En la tabla 2 se presentan dichos coeficientes².

Gráfico 1
Cargas Factoriales

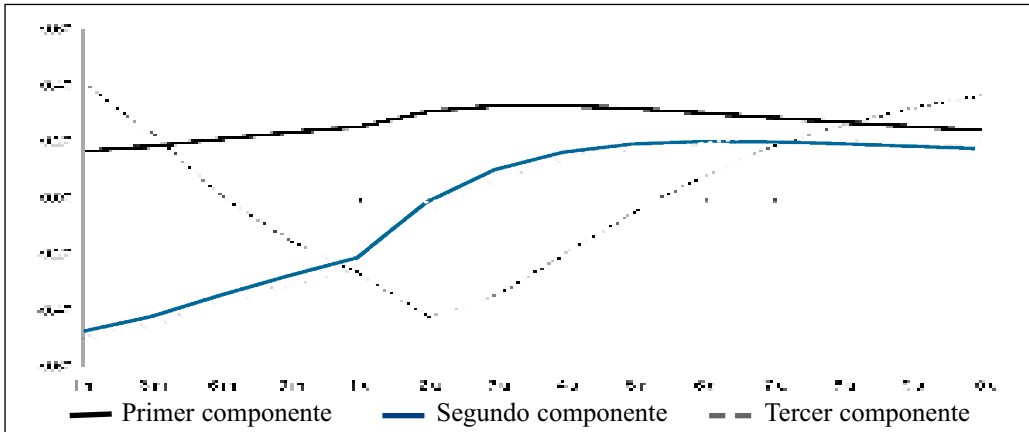


Tabla 2
Cargas Factoriales

	Plazos													
	1 m	3 m	6 m	9 m	1 a	2 a	3 a	4 a	5 a	6 a	7 a	8 a	9 a	10 a
Primer Componente	0.17	0.18	0.21	0.23	0.25	0.31	0.33	0.33	0.32	0.30	0.28	0.27	0.25	0.24
Segundo Componente	-0.50	-0.45	-0.38	-0.31	-0.24	-0.05	0.07	0.14	0.18	0.19	0.20	0.20	0.19	0.19
Tercer Componente	0.41	0.22	0.01	-0.16	-0.27	-0.43	-0.34	-0.19	-0.04	0.08	0.18	0.26	0.32	0.36

Como puede observarse, los coeficientes que determinan el efecto que produce sobre la ETTI un cambio en el primer componente principal, son todos positivos y de tamaño muy similar, lo que sugiere que este primer componente es responsable de cambios paralelos en la curva de tipos. En segundo lugar, se puede observar que los coeficientes que determinan el efecto que produce sobre la ETTI un cambio en el segundo componente principal, son de signo positivo en los tipos a largo plazo y negativos en los tipos a corto plazo. Ello sugiere que este segundo componente es responsable de cambios en la pendiente largo/corto plazo de la curva de tipos. Por último, los coeficientes que determinan el efecto que el tercer componente principal tiene sobre la estructura temporal en los plazos considerados en este trabajo, son de signo positivo en los tipos a corto y largo plazo y negativos en los tipos a medio plazo, de lo que se deduce que este componente es responsable de cambios en la curvatura de la ETTI.

2 Las cargas factoriales recogen el efecto que produce sobre la ETTI cambios en los componentes principales. Esto es así, porque el análisis de componentes principales se ha aplicado sobre datos no estandarizados, es decir, sobre los cambios en los tipos de interés sin estandarizar (véase, apéndice I).

Los resultados obtenidos, tanto en lo que se refiere al número de componentes necesarios para explicar un porcentaje suficientemente elevado de la variabilidad de la ETTI, como la forma en que los tres primeros componentes principales afectan a la estructura temporal, son similares a los obtenidos por Alexander(2000), Barber y Copper(1996), Litterman y Scheinkman (1991) y Navarro y Nave (1995) para el mercado español.

Atendiendo a la composición de los tres primeros componentes principales (ver tabla 2) cabría esperar que estos mantuviesen una correlación elevada con unos tipos de interés a unos plazos determinados y algunos diferenciales de tipos de interés y de pendientes. Concretamente, si atendemos al peso que los tipos de interés tienen en la composición del primer componente principal, podemos observar que son los tipos de interés a medio plazo (2, 3, 4 ó 5 años) los que mayor peso tienen en su composición. Ello sugiere que el primer componente principal podría ser identificado con un tipo de interés a medio plazo.

De la misma forma, atendiendo al peso que los tipos de interés tienen en la composición del segundo componente principal, podemos pensar que este componente podría estar estrechamente relacionado con un diferencial de tipos de interés largo/corto plazo. Por último, el peso que los tipos de interés tienen en la composición del tercer componente principal, hace sospechar que este componente pudiera estar relacionado con un diferencial de pendientes en el tramo largo y corto de la curva de tipos. Partiendo de esta evidencia, hemos analizado algunas correlaciones entre los tres primeros componentes principales y algunos tipos de interés a unos plazos determinados, algunos diferenciales de tipos y algunos diferenciales de pendientes.

En la tabla 3, presentamos las correlaciones estimadas entre el primer componente principal y las variaciones semanales de los tipos de interés. Como cabría esperar, el primer componente principal está altamente correlacionado con las variaciones semanales de los tipos de interés a medio plazo, especialmente con los tipos de interés a 2, 3, 4 y 5 años. El orden de las correlaciones estimadas oscila entre 0.93 y 0.95. Estos resultados confirman que el primer componente podría identificarse con un tipo de interés a medio plazo.

Tabla 3
Correlaciones contemporáneas.
Primer componente principal y tipos de interés

	Meses				Años									
	1	3	6	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Primer Componente	0.43	0.53	0.66	0.75	0.82	0.93	0.95	0.94	0.93	0.92	0.90	0.88	0.85	0.82

Nota: se han sombreado las correlaciones más altas.

En la tabla 4, presentamos las correlaciones estimadas entre el segundo componente principal y los diferenciales de tipos de interés a 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 10 años, con los tipos a 1 mes, 3, 6, 9, 12 y 24 meses.

Como puede observarse, el segundo componente principal está muy altamente correlacionado con el diferencial de tipos de interés a 8 años y 1 mes y con los diferenciales de tipos de interés a 6, 7, 8, 9 y 10 años y los tipos de interés a 3 y 6 meses. Para este amplio conjunto de diferenciales las correlaciones estimadas respecto al segundo componente principal oscilan entre 0.96 y 0.98.

Por último, en la tabla 5 presentamos las correlaciones estimadas entre el tercer componente principal y algunos diferenciales de pendientes. Encontramos 18 diferenciales de pendientes

Tabla 4
Correlaciones contemporáneas.
Segundo componente principal y diferenciales de tipos de interés

Años	Meses					
	1	3	6	9	12	24
3	0.81	0.85	0.87	0.87	0.87	0.81
4	0.87	0.90	0.91	0.90	0.88	0.78
5	0.91	0.93	0.94	0.92	0.89	0.76
6	0.94	0.96	0.96	0.93	0.90	0.72
7	0.95	0.97	0.97	0.94	0.89	0.68
8	0.96	0.98	0.97	0.94	0.88	0.64
9	0.95	0.97	0.97	0.93	0.87	0.59
10	0.95	0.97	0.96	0.91	0.85	0.55

Nota: se han sombreado las correlaciones más altas.

Tabla 5
Correlaciones: tercer componente principal y diferenciales de pendientes

	9m-1m	9m-3m	9m-6m	1a-1m	1a-3m	1a-6m	2a-1m	2a-3m	2a-6m	3 a-1m	3 a-3m	3 a-6m	4a-1m	4a-3m	4a-6m	5a-1m	5a-3m	5a-6m
6 a- 9 m	0.62	0.52	0.34	0.70	0.63	0.47	0.85	0.86	0.80	0.86	0.90	0.91	0.81	0.86	0.91	0.74	0.77	0.83
6 a- 1 a	0.70	0.63	0.47	0.76	0.72	0.60	0.85	0.88	0.87	0.84	0.88	0.91	0.79	0.81	0.86	0.71	0.73	0.75
6 a- 2 a	0.85	0.86	0.80	0.85	0.88	0.87	0.83	0.86	0.89	0.77	0.77	0.78	0.69	0.68	0.66	0.62	0.59	0.55
6 a- 3 a	0.86	0.90	0.91	0.84	0.88	0.91	0.77	0.77	0.78	0.67	0.65	0.62	0.59	0.55	0.49	0.51	0.46	0.38
6 a- 4 a	0.81	0.86	0.91	0.79	0.81	0.86	0.69	0.68	0.66	0.59	0.55	0.49	0.49	0.44	0.35	0.41	0.34	0.24
6 a- 5 a	0.74	0.77	0.83	0.71	0.73	0.75	0.62	0.59	0.55	0.51	0.46	0.38	0.41	0.34	0.24	0.33	0.25	0.13
7 a- 9 m	0.68	0.59	0.42	0.75	0.70	0.55	0.88	0.89	0.84	0.89	0.91	0.91	0.85	0.88	0.90	0.79	0.82	0.85
7 a- 1 a	0.75	0.70	0.55	0.80	0.78	0.67	0.88	0.91	0.90	0.87	0.90	0.91	0.82	0.84	0.87	0.76	0.77	0.79
7 a- 2 a	0.88	0.89	0.84	0.88	0.91	0.90	0.85	0.87	0.90	0.79	0.79	0.80	0.72	0.71	0.69	0.66	0.63	0.59
7 a- 3 a	0.89	0.92	0.92	0.87	0.90	0.91	0.79	0.79	0.80	0.70	0.68	0.65	0.62	0.58	0.53	0.55	0.50	0.43
7 a- 4 a	0.85	0.88	0.90	0.82	0.84	0.87	0.72	0.71	0.69	0.62	0.58	0.53	0.53	0.48	0.40	0.45	0.39	0.30
7 a- 5 a	0.79	0.82	0.85	0.76	0.77	0.79	0.66	0.63	0.59	0.55	0.50	0.43	0.45	0.39	0.30	0.37	0.30	0.19
8 a- 9 m	0.73	0.65	0.48	0.80	0.75	0.61	0.90	0.91	0.87	0.90	0.92	0.91	0.86	0.88	0.87	0.81	0.83	0.81
8 a- 1 a	0.80	0.75	0.61	0.84	0.82	0.72	0.90	0.92	0.91	0.88	0.90	0.91	0.83	0.85	0.85	0.78	0.79	0.79
8 a- 2 a	0.90	0.91	0.87	0.90	0.92	0.91	0.86	0.88	0.90	0.80	0.80	0.80	0.73	0.72	0.70	0.67	0.65	0.61
8 a- 3 a	0.90	0.92	0.91	0.88	0.90	0.91	0.80	0.80	0.80	0.71	0.69	0.66	0.63	0.60	0.55	0.57	0.52	0.46
8 a- 4 a	0.86	0.88	0.87	0.83	0.85	0.85	0.73	0.72	0.70	0.63	0.60	0.55	0.54	0.50	0.43	0.48	0.42	0.33
8 a- 5 a	0.81	0.83	0.81	0.78	0.79	0.79	0.67	0.65	0.61	0.57	0.52	0.46	0.48	0.42	0.33	0.40	0.33	0.23
9 a- 9 m	0.77	0.69	0.53	0.83	0.78	0.65	0.92	0.92	0.88	0.90	0.91	0.89	0.86	0.87	0.83	0.82	0.82	0.77
9 a- 1 a	0.83	0.78	0.65	0.87	0.85	0.75	0.91	0.93	0.92	0.88	0.90	0.89	0.84	0.84	0.83	0.79	0.79	0.77
9 a- 2 a	0.92	0.92	0.88	0.91	0.93	0.92	0.87	0.88	0.89	0.80	0.79	0.79	0.73	0.72	0.69	0.68	0.66	0.61
9 a- 3 a	0.90	0.91	0.89	0.88	0.90	0.89	0.80	0.79	0.79	0.71	0.69	0.66	0.64	0.60	0.55	0.58	0.53	0.47
9 a- 4 a	0.86	0.87	0.83	0.84	0.84	0.83	0.73	0.72	0.69	0.64	0.60	0.55	0.55	0.51	0.44	0.49	0.43	0.35
9 a- 5 a	0.82	0.82	0.77	0.79	0.79	0.77	0.68	0.66	0.61	0.58	0.53	0.47	0.49	0.43	0.35	0.42	0.35	0.26
10 a- 9 m	0.79	0.72	0.56	0.85	0.80	0.67	0.92	0.92	0.87	0.90	0.90	0.86	0.86	0.85	0.80	0.81	0.80	0.73
10 a- 1 a	0.85	0.80	0.67	0.88	0.86	0.77	0.92	0.93	0.91	0.88	0.89	0.87	0.83	0.83	0.80	0.79	0.78	0.74
10 a- 2 a	0.92	0.92	0.87	0.92	0.93	0.91	0.86	0.87	0.87	0.80	0.79	0.77	0.73	0.71	0.68	0.68	0.65	0.61
10 a- 3 a	0.90	0.90	0.86	0.88	0.89	0.87	0.80	0.79	0.77	0.71	0.69	0.65	0.64	0.60	0.55	0.58	0.54	0.47
10 a- 4 a	0.86	0.85	0.80	0.83	0.83	0.80	0.73	0.71	0.68	0.64	0.60	0.55	0.56	0.51	0.44	0.49	0.44	0.36
10 a- 5 a	0.81	0.80	0.73	0.79	0.78	0.74	0.68	0.65	0.61	0.58	0.54	0.47	0.49	0.44	0.36	0.43	0.36	0.27

que mantienen una correlación de 0.92 con el tercer componente principal y 4 diferenciales que presentan una correlación de 0.93. Estos cuatro diferenciales de pendientes son los siguientes: 9 años/1 año y 2 años/3 meses; 9 años/2 años y 1 año/3 meses; 10 años/2 años y 1 año/3 meses; 10 años/1 año y 2 años/3 meses.

Los resultados obtenidos en el análisis de correlaciones presentado en las tablas 3, 4 y 5, ponen de manifiesto que los tres primeros componentes principales pueden ser identificados con unos tipos de interés a unos plazos clave, algunos diferenciales de tipos de interés y algunos diferenciales de pendientes. Encontramos además que hay un conjunto relativamente amplio de estas variables que podrían ser identificadas con los tres primeros componentes.

Para evitar que la selección de estas variables se realice de forma arbitraria, utilizamos un criterio de ausencia de correlación. Es decir, entre todas las variables candidatas a ser identificadas con el primer, segundo y tercer componente principal, elegimos aquellas que mantienen entre sí una menor correlación.

En la tabla 6, presentamos las correlaciones estimadas entre los candidatos a ser identificados con el primer y segundo componente principal. Entre ellas, las variables que mantienen entre sí una menor correlación son el tipo de interés a 2 años y los diferenciales de tipos de interés a 9 años/3 meses, 10 años/3 meses, 7 años/6 meses, 8 años/6 meses, 9 años/6 meses y 10 años/6 meses. La correlación estimada entre estas variables es respectivamente de 0.05, 0.02, 0.05, -0.01, -0.05 y -0.09.

Las correlaciones estimadas entre los candidatos a ser identificados con el segundo y tercer componente principal son presentadas en la tabla 7. Dichas correlaciones son bastante pequeñas siendo en general inferiores a 0.20. Muchas de ellas son menores a 0.10 y algunas llegan a ser iguales o menores a +/- 0.01.

En última instancia analizamos las correlaciones entre los candidatos a ser identificados con el primer y tercer componente principal (ver tabla 8). En este análisis los resultados son algo menos satisfactorios ya que se ha encontrado que para todos los candidatos, las correlaciones estimadas son relativamente altas y oscilan entre -0.13 y -0.67.

Tabla 6
Correlaciones entre proxies del primer y segundo componente principal

	2 a	3 a	4 a	5 a
8 a - 1 m	0.16	0.35	0.44	0.50
6 a - 3 m	0.20	0.42	0.53	0.58
7 a - 3 m	0.14	0.36	0.48	0.54
8 a - 3 m	0.10	0.31	0.43	0.50
9 a - 3 m	0.05	0.26	0.38	0.46
10 a - 3 m	0.02	0.22	0.33	0.41
6 a - 6 m	0.11	0.36	0.49	0.56
7 a - 6 m	0.05	0.29	0.43	0.52
8 a - 6 m	-0.01	0.23	0.38	0.47
9 a - 6 m	-0.05	0.18	0.32	0.42
10 a - 6 m	-0.09	0.13	0.27	0.37

Nota: se han sombreado las correlaciones más bajas

Tabla 7
Correlaciones entre las proxies del segundo y tercer componente principal

	8 a - 1 m	6 a - 3 m	7 a - 3 m	8 a - 3 m	9 a - 3 m	10 a - 3 m	6 a - 6 m	7 a - 6 m	8 a - 6 m	9 a - 6 m	10 a - 6 m
7 a - 3 a/ 9 m - 3 m	-0.27	-0.22	-0.18	-0.16	-0.14	-0.13	-0.07	-0.03	0.01	0.03	0.04
7 a - 3 a/ 9 m - 6 m	-0.27	-0.22	-0.18	-0.16	-0.14	-0.13	-0.07	-0.03	0.01	0.03	0.04
9 a - 9 m/ 2 a - 1 m	-0.12	-0.09	-0.03	0.01	0.04	0.07	0.08	0.15	0.20	0.23	0.26
9 a - 9 m/ 2 a - 3 m	0.01	0.02	0.08	0.13	0.17	0.20	0.18	0.25	0.31	0.35	0.38
9 a - 1 a/ 2 a - 3 m	-0.15	-0.11	-0.07	-0.04	-0.02	0.00	0.04	0.09	0.12	0.15	0.17
9 a - 1 a/ 2 a - 6 m	0.07	0.09	0.14	0.17	0.20	0.22	0.22	0.27	0.32	0.35	0.37
9 a - 2 a/ 9 m - 1 m	-0.12	-0.11	-0.05	0.00	0.04	0.07	0.05	0.12	0.18	0.22	0.26
9 a - 2 a/ 9 m - 3 m	0.07	0.05	0.12	0.18	0.23	0.26	0.20	0.28	0.34	0.39	0.43
9 a - 2 a/ 1 a - 3 m	-0.12	-0.11	-0.05	0.00	0.04	0.07	0.05	0.12	0.18	0.22	0.26
9 a - 2 a/ 1 a - 6 m	0.07	0.05	0.12	0.18	0.23	0.26	0.20	0.28	0.34	0.39	0.43
8 a - 9 m/ 3 a - 3 m	-0.12	-0.09	-0.03	0.01	0.04	0.07	0.08	0.14	0.19	0.23	0.26
8 a - 1 a/ 2 a - 3 m	-0.21	-0.22	-0.15	-0.10	-0.06	-0.02	-0.07	0.01	0.07	0.12	0.16
8 a - 2 a/ 1 a - 3 m	-0.12	-0.09	-0.03	0.01	0.04	0.07	0.08	0.15	0.20	0.23	0.26
8 a - 3 a/ 9 m - 3 m	0.01	0.02	0.08	0.13	0.17	0.20	0.18	0.25	0.31	0.35	0.38
10 a - 9 m/ 2 a - 1 m	-0.12	-0.11	-0.05	0.00	0.04	0.07	0.06	0.13	0.18	0.22	0.26
10 a - 9 m/ 2 a - 3 m	0.00	-0.01	0.06	0.12	0.16	0.19	0.14	0.22	0.28	0.33	0.37
10 a - 1 a/ 2 a - 1 m	-0.22	-0.21	-0.15	-0.10	-0.06	-0.03	-0.04	0.03	0.08	0.13	0.16
10 a - 1 a/ 2 a - 3 m	-0.12	-0.13	-0.06	-0.01	0.04	0.07	0.02	0.10	0.16	0.21	0.25
10 a - 2 a/ 9 m - 1 m	-0.12	-0.11	-0.05	0.00	0.04	0.07	0.06	0.13	0.18	0.22	0.26
10 a - 2 a/ 1 a - 1 m	-0.22	-0.21	-0.15	-0.10	-0.06	-0.03	-0.04	0.03	0.08	0.13	0.16
10 a - 2 a/ 9 m - 3 m	0.00	-0.01	0.06	0.12	0.16	0.19	0.14	0.22	0.28	0.33	0.37
10 a - 2 a/ 1 a - 3 m	-0.12	-0.13	-0.06	-0.01	0.04	0.07	0.02	0.10	0.16	0.21	0.25

Nota: sombreamos las correlaciones iguales o inferiores a +/- 0.01

En base a los resultados obtenidos las variables elegidas como proxies de los tres factores desconocidos son tres: el tipo de interés a 2 años (como proxy del primer factor), el diferencial de tipos de interés 7 años/6 meses (como proxy del segundo factor) y el diferencial de pendientes 8 años/1 año y 2 años/3 meses, como proxy del tercer factor.

La correlación estimada entre el tipo de interés a 2 años y el diferencial de tipos de interés a 7 años/6 meses es de 0.05. La correlación estimada entre el diferencial de tipos 7 años/6 meses y el diferencial de pendientes 8 años/1 año y 2 años/3 meses es de 0.01. Por último, la correla-

Tabla 8
Correlaciones entre las proxies del primer y tercer componente principal

	2 a	3 a	4 a	5 a
7 a -3 a/9 m - 3 m	-0.56	-0.47	-0.33	-0.21
7 a -3 a/9 m - 6 m	-0.62	-0.47	-0.30	-0.16
9 a -9 m/2 a - 1 m	-0.63	-0.52	-0.38	-0.27
9 a -9 m/2 a -3 m	-0.64	-0.51	-0.37	-0.24
9 a -1 a/2 a - 3 m	-0.59	-0.46	-0.31	-0.18
9 a -1 a/2 a - 6 m	-0.62	-0.46	-0.28	-0.13
9 a -2 a/9 m - 1 m	-0.63	-0.52	-0.38	-0.27
9 a -2 a/9 m - 3 m	-0.64	-0.51	-0.37	-0.24
9 a -2 a/1 a - 3 m	-0.65	-0.55	-0.43	-0.31
9 a -2 a/1 a - 6 m	-0.64	-0.52	-0.38	-0.26
8 a -9 m/3 a - 3 m	-0.67	-0.61	-0.49	-0.39
8 a -1 a/2 a - 3 m	-0.63	-0.52	-0.38	-0.27
8 a -2 a/1 a - 3 m	-0.63	-0.52	-0.38	-0.27
8 a -3 a/9 m - 3 m	-0.67	-0.61	-0.49	-0.39
10 a -9 m/ 2 a - 1 m	-0.65	-0.55	-0.42	-0.31
10 a -9 m/2 a - 3 m	-0.66	-0.54	-0.41	-0.29
10 a -1 a/2 a - 1 m	-0.66	-0.58	-0.46	-0.36
10 a -1 a/2 a - 3 m	-0.67	-0.58	-0.46	-0.35
10 a -2 a/9 m - 1 m	-0.65	-0.55	-0.42	-0.31
10 a -2 a/1 a - 1 m	-0.66	-0.58	-0.46	-0.36
10 a -2 a/9 m - 3m	-0.66	-0.54	-0.41	-0.29
10 a -2 a/1 a - 3 m	-0.67	-0.58	-0.46	-0.35

ción estimada entre el tipo de interés a 2 años y el diferencial de pendientes 8 años/1 año y 2 años/3 meses es de -0.63.

La elevada correlación existente entre las proxies del primer y tercer factor seleccionados va a introducir algún tipo de sesgo en la interpretación de los componentes del vector de duración. Para evitarlo se podría realizar una regresión auxiliar entre ambas variables y utilizar los residuos como proxies de los factores desconocidos. Eso nos permitiría independizar los efectos que sobre los precios de los bonos tuviesen cambios en las variables seleccionadas. Sin embargo, entendemos que dicho ejercicio restaría interpretabilidad al modelo que planteamos.

3.2. Estimación de un modelo de factores de la ETTI

De acuerdo con los resultados obtenidos en el apartado anterior, explicamos los cambios en los tipos de interés mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \Delta r_{i,t} = & a_i^{2a} \Delta r_{2a,t} + b_i^{7a/6m} \Delta (r_{7a,t} - r_{6m,t}) + \\ & + c_i^{(8a/1a) - (2a/3m)} \Delta ((r_{8a,t} - r_{1a,t}) - (r_{2a,t} - r_{3m,t})) + \varepsilon_{i,t} \end{aligned} \quad (5)$$

donde:

$\Delta r_{i,t}$: :representa los cambios en el intervalo temporal $[t-1,t]$ del tipo de interés a plazo i .

$\Delta r_{2a,t}$: representa los cambios en el intervalo temporal $[t-1,t]$ del tipo de interés a 2 años.

a_i^{2a} : es un coeficiente que mide la sensibilidad del tipo de interés a plazo i respecto a cambios en el tipo de interés a 2 años.

$\Delta(r_{7a,t} - r_{6m,t})$: representa los cambios en el intervalo temporal $[t-1,t]$ del diferencial de tipos de interés a 7 años/6 meses.

$b_i^{7a/6m}$: es un coeficiente que mide la sensibilidad del tipo de interés a plazo i respecto a cambios en el diferencial 7 años/6 meses.

$\Delta((r_{8a,t} - r_{1a,t}) - (r_{2a,t} - r_{3m,t}))$: : representa los cambios en el intervalo temporal $[t-1,t]$ del diferencial de pendientes 8 años/ 1 año y 2 años/3 meses

$c_i^{(8a/1a)-(2a/3m)}$: es un coeficiente que mide la sensibilidad del tipo de interés a plazo i respecto a cambios en el diferencial de pendientes 8 años/1 año y 2 años/3 meses.

Estimamos el modelo (5) para los 14 tipos de interés considerados. El período muestral analizado se extiende desde el 4 de enero de 1999 hasta el 31 de diciembre de 2002.

En el gráfico 2 presentamos los coeficientes de los modelos estimados. Llama la atención la similitud de los gráficos 1 y 2. Como puede observarse en el gráfico 2, los coeficientes que determinan el efecto sobre la ETTI de cambios en el tipo a dos años son todos positivos y de tamaño similar, lo que pone de manifiesto que esta variable es un componente de nivel, lo mismo que el primer componente principal en el gráfico 1. Por otro lado, los coeficientes que miden el efecto de cambios en el diferencial de tipos 7 años/6meses sobre los tipos a corto y largo plazo,

Gráfico 2
Coeficientes estimados en los modelos de regresión

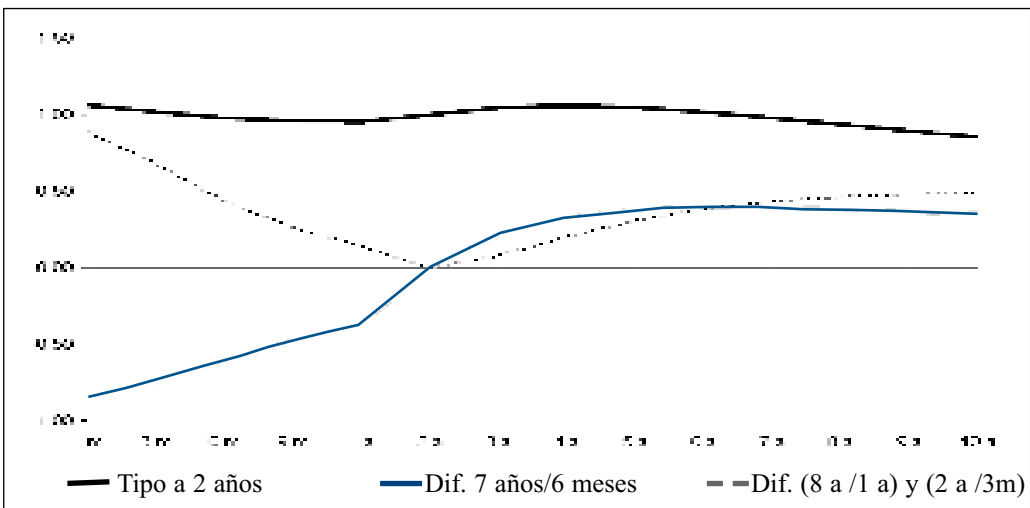


Tabla 9
Validación del modelo de regresión

<i>Intramuestral: enero de 1999 hasta diciembre de 2002 (cont.)</i>														
	Meses				Años									
	1	3	6	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R2	0.98	1.00	0.99	0.99	0.98	1.00	0.99	0.98	0.99	1.00	0.99	0.97	0.93	0.88
Error medio	-0.03	0.00	0.02	0.03	0.03	0.00	-0.02	-0.03	-0.02	0.00	0.02	0.04	0.05	0.06
Error máximo	2.85	0.89	1.10	1.72	1.81	0.00	2.16	2.88	2.29	1.24	1.10	2.21	3.93	6.04
Error mínimo	-2.11	-1.04	-0.93	-1.78	-1.98	0.00	-1.80	-2.35	-2.34	-1.52	-0.93	-2.87	-4.78	-6.58
Desviación típica	0.81	0.27	0.31	0.54	0.59	0.00	0.64	0.86	0.71	0.33	0.31	0.83	1.37	1.89
Media errores absolutos	1.04	0.30	0.42	0.73	0.78	0.00	0.79	1.02	0.79	0.33	0.42	1.07	1.70	2.30
<i>Extramuestral: enero de 2003 hasta mayo de 2003</i>														
Desviación típica	0.69	0.27	0.26	0.43	0.47	0.00	0.53	0.75	0.67	0.38	0.26	0.69	1.20	1.70
Media errores absolutos	0.54	0.21	0.20	0.35	0.38	0.00	0.42	0.59	0.53	0.30	0.20	0.54	0.93	1.32

Nota: Los errores están expresados en puntos básicos.

son positivos en los tipos a largo y negativos en los tipos a corto plazo, lo que refleja que dicha variable genera cambios de pendiente en la estructura temporal. Lo mismo se puede decir del diferencial de pendientes 8 años/1 año y 2 años/3 meses y el tercer componente principal; ambos generan cambios en la curvatura de la ETTI.

Para validar el modelo propuesto calculamos el coeficiente de determinación y la media de los errores de ajuste en valor absoluto (ver tabla 9). En base a estos dos instrumentos podríamos afirmar que el ajuste del modelo es bastante bueno. El coeficiente de determinación es, en casi todos los casos, igual o superior a 0.98. El ajuste del modelo es algo menor en los tipos de interés a 9 y 10 años, de 0.93 y 0.88 respectivamente. La media de los errores en valor absoluto es también bastante pequeña, siendo en la mayoría de los casos inferior a un punto básico (ver tabla 9).

Hacemos también un análisis de bondad de ajuste del modelo fuera de la muestra. En el período muestral que se extiende desde el 2 de enero de 2003 hasta el 26 de mayo de ese mismo año, calculamos los cambios semanales en los tipos de interés y los comparamos con los cambios previstos por el modelo de regresión. Todo ello supuesto previsión perfecta de las variables explicativas de la ETTI. Los resultados vuelven a ser satisfactorios. Con la excepción del tipo de interés a 10 años, la media de los errores en valor absoluto es inferior a 1 punto básico en todos los casos (tabla 9).

Tabla 10
Estadísticos de los residuos. Modelo de componentes principales

<i>Intramuestral: enero de 1999 hasta diciembre de 2002</i>														
	Meses				Años									
	1	3	6	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Error medio	0.01	0.00	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	-0.01	-0.02
Error máximo	10.78	2.87	5.10	7.98	8.30	3.32	5.27	8.30	7.51	4.60	1.77	2.86	5.92	9.38
Error mínimo	-10.67	-2.48	-4.54	-8.10	-9.09	-39.85	-5.85	-7.42	-6.63	-4.96	-39.01	-3.03	-6.67	-9.92
Desviación típica	39.15	0.60	0.88	1.60	1.83	0.64	1.00	1.68	1.62	1.08	0.35	0.59	1.42	2.22
Media errores absolutos	1.29	0.37	0.51	0.96	1.11	0.43	0.57	1.03	1.03	0.71	0.24	0.35	0.90	1.43
<i>Extramuestral: enero de 2003 hasta mayo de 2003</i>														
Desviación típica	0.89	0.42	0.46	0.73	0.86	0.49	0.31	0.79	0.93	0.78	0.46	0.24	0.63	1.12
Media errores absolutos	0.70	0.32	0.36	0.59	0.69	0.39	0.25	0.61	0.72	0.59	0.32	0.19	0.49	0.89

Nota: Los errores están expresados en puntos básicos.

Por último, comparamos los resultados obtenidos por nuestro modelo con los cosechados por los modelos de componentes principales. Para ello hemos estimado un modelo de regresión donde incluimos los tres primeros componentes principales de los cambios en la ETI como proxies de los tres factores desconocidos. En la tabla 10 presentamos algunos estadísticos de los residuos, tanto dentro como fuera de la muestra. En el análisis intramuestral encontramos que los errores de ajuste del modelo de componentes principales son bastante pequeños, aunque con la excepción de los tipos a 3, 7, 8, 9 y 10 años dichos errores son mayores a los cosechados por el modelo de regresión. Fuera de la muestra encontramos un resultado similar. Los errores de ajuste del modelo de componentes principales son en media mayores a los errores de ajuste del modelo de regresión propuesto.

4. APROXIMACIÓN LINEAL DE LOS CAMBIOS EN PRECIO

De acuerdo con el modelo presentado en la sección anterior, los cambios semanales en los precios de los bonos pueden expresarse como la suma de tres componentes,

$$\frac{\Delta p_t^j}{p^j} \approx -D_{t,2a}^j \Delta r_{2a,t} - D_{t,7a/6m}^j \Delta(r_{7a,t} - r_{6m,t}) \quad (6)$$

$$- D_{t,(8a/1a)-(2a/3m)}^j \Delta((r_{8a,t} - r_{1a,t}) - (r_{2a,t} - r_{3m,t}))$$

donde $\Delta r_{2a,t}$, $\Delta(r_{7a,t} - r_{6m,t})$ y $\Delta((r_{8a,t} - r_{1a,t}) - (r_{2a,t} - r_{3m,t}))$ se definieron ya en la sección anterior y $D_{t,2a}^j$, $D_{t,7a/6m}^j$ y $D_{t,(8a/1a)-(2a/3m)}^j$ son los tres componentes de vector de duración propuesto y se calculan como:

$$D_{t,2a}^j = -\frac{1}{p^j} \sum_{i=1}^k \frac{\partial p_t^j}{\partial r_{i,t}} a_i^{2a}$$

$$D_{t,7a/6m}^j = -\frac{1}{p^j} \sum_{i=1}^k \frac{\partial p_t^j}{\partial r_{i,t}} b_i^{7a/6m}$$

$$D_{t,(8a/1a)-(2a/3m)}^j = -\frac{1}{p^j} \sum_{i=1}^k \frac{\partial p_t^j}{\partial r_{i,t}} c_i^{(8a/1a)-(2a/3m)}$$

donde:

$D_{t,2a}^j$: mide la sensibilidad del bono j a cambios en el tipo de interés a dos años.

$D_{t,7a/6m}^j$: mide la sensibilidad del bono j a cambios en el diferencial de tipos de interés 7 años/6 meses.

$D_{t,(8a/1a)-(2a/3m)}^j$: mide la sensibilidad del bono j a cambios en el diferencial de pendientes 8 años/1 año y 2 años/3 meses.

los coeficientes a_i^{2a} , $b_i^{7a/6m}$ y $c_i^{(8a/1a)-(2a/3m)}$ se definieron en la sección anterior y se calculan al estimar los modelos de regresión. Por último, k es el número de pagos que le restan al bono j hasta la fecha de amortización.

En esta sección evaluamos la capacidad del vector de duración propuesto para explicar los cambios en los precios de los bonos de la deuda española. Con tal objetivo realizamos el siguiente ejercicio. Para 23 referencias cotizadas en el mercado secundario español el 2 de enero de 2003, y durante cinco meses consecutivos, desde enero de 2003 hasta mayo de 2003 se ha calculado semanalmente el vector de duraciones propuesto.

Utilizando dichos vectores y suponiendo previsión perfecta de las variables explicativas de la ETTI, hemos calculado los cambios semanales en los precios de las 23 referencias analizadas. A partir de los precios de mercado observados en t , y los cambios previstos por el vector de duraciones, se ha calculado el precio de cada referencia una semana hacia delante y se ha comparado con su precio de mercado.

Antes de presentar los resultados obtenidos en dicho ejercicio comentamos brevemente las características de los vectores de duración estimados a fecha del 2 de enero de 2003.

Como puede observarse en la tercera columna de la tabla 11, el primer componente del vector de duración es muy similar a la duración de Fisher y Weil para todas las referencias. Este resultado no es extraño, ya que la duración de Fisher y Weil mide la sensibilidad del precio de un

Tabla 11
Vector de duraciones. Raíz cuadrada del error cuadrático medio

Cupones	Vencimiento	D_{FW}	D_1	D_2	D_3	<i>RCECM</i>	
						Modelo de regresión	Componentes principales
B-4.60	30-jul-03	0.52	0.51	-0.38	0.20	0.033	0.035
O-10.90	30-ago-03	0.61	0.59	-0.41	0.19	0.021	0.022
O-10.50	30-oct-03	0.78	0.74	-0.44	0.16	0.028	0.030
O-8.00	30-may-04	1.30	1.23	-0.44	0.00	0.016	0.017
O-4.50	30-jul-04	1.49	1.42	-0.42	-0.05	0.026	0.027
B-4.65	31-oct-04	1.76	1.68	-0.37	-0.10	0.019	0.019
O-10.00	28-feb-05	1.89	1.83	-0.29	-0.10	0.021	0.022
B-3.25	31-ene-05	1.96	1.90	-0.30	-0.12	0.015	0.015
B-4.95	30-jul-05	2.42	2.38	-0.18	-0.09	0.020	0.019
O-10.15	31-ene-06	2.63	2.59	-0.04	0.02	0.020	0.019
O-8.80	30-abr-06	2.93	2.87	0.03	0.09	0.031	0.031
B-4.80	31-oct-06	3.60	3.57	0.23	0.30	0.025	0.023
O-7.35	31-mar-07	3.70	3.65	0.31	0.45	0.024	0.022
O-6.00	31-ene-08	4.44	4.30	0.58	0.85	0.029	0.028
O-4.25	31-oct-07	4.51	4.42	0.57	0.80	0.032	0.031
O-8.20	28-feb-09	5.03	4.78	0.82	1.27	0.034	0.033
O-5.15	30-jul-09	5.84	5.43	1.06	1.62	0.032	0.031
O-4.00	31-ene-10	6.24	5.78	1.25	1.90	0.031	0.029
O-8.70	28-feb-12	6.96	6.10	1.51	2.27	0.038	0.038
O-5.40	30-jul-12	7.26	6.43	1.59	2.41	0.034	0.033
O-5.35	31-oct-11	7.55	6.64	1.68	2.53	0.035	0.034
O-6.15	31-ene-13	7.92	6.74	1.86	2.72	0.042	0.038
O-5.00	28-feb-12	8.08	6.95	1.88	2.78	0.039	0.039

- D1: denota la sensibilidad de los precios de los bonos a cambios en el tipo de interés a dos años.
- D2: denota la sensibilidad de los precios de los bonos a cambios en el diferencial de tipos de interés a 7 años y 6 meses.
- D3: denota la sensibilidad de los precios de los bonos a cambios en el diferencial de pendientes 8 años/1año y 2años/3meses.
- RCECM: representa la raíz cuadrada del error cuadrático medio.
- D_{FW} : representa la duración de Fisher y Weil.

activo ante cambios paralelos de la ETTI, lo mismo que el primer componente del vector de duraciones propuesto.

Respecto al signo y el tamaño de los componentes de los vectores de duración calculados, cabe mencionar lo siguiente:

1) En primer lugar, cabe observar que el primer componente de los vectores de duración calculados es positivo en todos los casos. Ello significa que cambios en el tipo de interés a dos años lleva asociado variaciones inversas en los precios de todas las referencias. Si el tipo a 2 años aumenta, caerá el precio de todas las referencias, mientras que si disminuye, aumentará el precio de todas las referencias.

2) En segundo lugar, el segundo componente de los vectores de duración calculados es negativo en las referencias con duración tradicional inferior a 2.93 años y positivo en el resto. Ello significa que un aumento en el diferencial de tipos de interés 7 años/6 meses, generará aumentos en el precio de las referencias con duración tradicional inferior a 2.93 años y caídas de precio en el resto (y viceversa).

A la vista de estos resultados, podríamos decir que a fecha del “2 de enero de 2003” un desplazamiento ascendente y casi paralelo de la ETTI acompañado de un aumento en su pendiente, entendida como el diferencial de tipos a 7 años y 6 meses, va a generar menores caídas en el precio de los bonos con duración tradicional inferior a 2.93 años.

3) En tercer lugar, el tercer componente del vector de duración propuesto es netamente positivo para los bonos y obligaciones con duración tradicional inferior a 1.49 años y superior a 2.42 años. Y es negativo para los bonos y obligaciones con duración entre 1.49 y 2.42 años.

Volviendo al ejercicio planteado anteriormente, en las columnas 6 y 7 de la tabla 11, presentamos el error cuadrático medio para las 23 referencias consideradas. Los resultados parecen bastante buenos, ya que en media los errores cometidos son siempre inferiores al 0,05%. Como cabría esperar, dados los resultados presentados en la tabla 11, los errores en precio son mayores en las referencias con mayor duración tradicional (Fisher-Weil). En términos medios (error cuadrático medio) dichos errores oscilan entre el 0.015% del bono cupón 3.25% y el 0.042% del bono cupón 6.15%.

Comparando estos errores con los obtenidos por un vector de duraciones derivado de un modelo de componentes principales, encontramos que los resultados son bastante satisfactorios. Para la mayoría de las referencias, el error medio es similar con ambos procedimientos.

5. CONCLUSIONES

La mayoría de las metodologías desarrolladas para la gestión de carteras de títulos de deuda pública han sido diseñadas bajo el supuesto de que la Estructura Temporal de Tipos de Interés puede ser explicada a partir de un número reducido de variables o factores. En muchos casos las variables elegidas para explicar la ETTI son tipos de interés a unos plazos determinados que se eligen generalmente de forma ad-hoc. EGM(1990) argumentaron, que el fracaso en el área de inmunización de carteras, de los modelos más complejos frente a los modelos más simples, se debe precisamente a que en estos modelos las variables utilizadas para explicar los cambios en la ETTI se eligieron de forma arbitraria.

En el trabajo mencionado se pone de manifiesto que no todos los tipos de interés explican igual de bien la estructura temporal, por lo que elegir adecuadamente los plazos empleados para su explicación es determinante para los resultados de gestión.

En este trabajo se propone una metodología para determinar cuales son los tipos de interés que mejor explican el comportamiento de la ETTI. La metodología propuesta consiste en buscar proxies de los primeros componentes principales de los cambios en la ETTI. En el contexto de un modelo unifactorial, el criterio propuesto consiste en elegir el tipo de interés que mayor correlación presente con el primer componente principal, que generalmente explica más de un 80% de la variabilidad de los cambios en la curva de tipos. En el contexto de un modelo bifactorial el criterio propuesto consiste en elegir aquellos tipos de interés y diferenciales de tipos de interés que estando altamente correlacionados con los dos primeros componentes principales (que generalmente explican más de un 90% de la variabilidad de los cambios en la ETTI) mantienen entre sí una menor correlación. Por último, en el contexto de un modelo trifactorial el método propuesto consiste en elegir aquellos tipos de interés, diferenciales de tipos de interés y diferenciales de pendientes que estando altamente correlacio-

nados con los tres primeros componentes principales de los cambios en la ETTI (que explican más de un 95% de su variabilidad) mantienen entre sí una menor correlación.

En este trabajo aplicamos este último criterio sobre un amplio conjunto de tipos de interés de la deuda pública española. Siguiendo este criterio las variables seleccionadas son tres: el tipo de interés a 2 años; el diferencial de tipos de interés a 7 años/6 meses y el diferencial de pendientes 8 años/1 año y 2 años/3mes. Es importante mencionar que la metodología presentada en este trabajo, al igual que la propuesta por EGM(1990), es sensible al conjunto de tipos de interés considerados. En este sentido los resultados obtenidos no pretenden ser una receta para el analista. Lo que se pretende es presentar una forma alternativa de seleccionar los tipos de interés que mejor explican la estructura temporal. Obviamente los resultados obtenidos dependerán del conjunto de tipos de interés que definan dicha estructura.

El trabajo presenta además una segunda aportación. Planteamos un modelo de factores de la estructura temporal basado en el análisis de regresión. El modelo propuesto incorpora tres variables que han sido seleccionadas utilizando la metodología propuesta. Frente a otros modelos desarrollados en la literatura el modelo propuesto presenta conjuntamente una serie de ventajas. Es flexible, en el sentido de que explica una gran variedad de cambios en la ETTI; fácilmente implementable, ya que se basa en el análisis de regresión; e incorpora variables explicativas que son observables, lo que es importante para su posible utilización en la gestión activa del riesgo de interés. A partir del modelo propuesto es posible obtener un vector de duración tridimensional cuyos componentes miden la sensibilidad de los bonos a cambios en el nivel, la pendiente y la curvatura de la ETTI. Se ha comprobado además que la capacidad de dicho vector para explicar los cambios en los precios de la deuda española es elevada y similar a la obtenida por un vector de duración derivado de un modelo de componentes principales.

De cara a investigación futura sería interesante comparar la metodología propuesta en este trabajo para seleccionar los tipos de interés que mejor explican la ETTI, con la diseñada por EGM(1990). Dicha comparación podría hacerse en un contexto univariante y bivariante.

APÉNDICE I. TÉCNICAS DE COMPONENTES PRINCIPALES

El análisis de componentes principales tiene como objetivo, dadas n observaciones de k variables, analizar si es posible representar adecuadamente esta información con un número menor de variables que sean combinaciones lineales de las originales.

Sea R una matriz de datos de orden $n \times k$, donde en columnas se representa las variables y por filas las n observaciones de cada una de las k variables. Para resumir la información contenida en R definimos el siguiente modelo:

$$r_{i,t} = b_{i,1}z_{1,t} + b_{i,2}z_{2,t} + b_{i,3}z_{3,t} + \dots + b_{i,p}z_{p,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (1)$$

$$t = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, k$$

donde: $r_{i,t}$ representa la observación t -ésima de la variable r_i y $z_{j,t}$ es la observación t -ésima del componente j en un modelo de p componentes principales.

En términos vectoriales, el modelo (1) se define como:

$$r_i = b_{i,1}z_1 + b_{i,2}z_2 + b_{i,3}z_3 + \dots + b_{i,p}z_p + \varepsilon_i \quad (2)$$

$$i = 1, \dots, k$$

donde r_i es un vector columna de orden $n \times 1$. Las variables z_1, z_2, \dots, z_p , de orden $n \times 1$, se denominan *componentes principales* y se definen como:

$$z_j = a_{j,1} r_1 + a_{j,2} r_2 + a_{j,3} r_3 + \dots + a_{j,k} r_k$$

$$j = 1, \dots, p$$

El análisis de componentes principales consiste en determinar la forma de los componentes principales que resumen óptimamente la información contenida en la matriz de datos, R , es decir, en determinar el conjunto de coeficientes $(a_{j,1}, a_{j,2}, \dots, a_{j,k})$ para $j=1, \dots, p$, tales que, el error cometido al aproximar la matriz de datos R por el modelo (1) sea mínimo³.

Se puede demostrar que los componentes principales que resumen optimamente la información contenida en R , es decir, que mejor explican las variables contenidas en R son aquellos que presentan mayor varianza.

Por tanto, para calcular los coeficientes que definen los componentes principales hay que resolver un simple problema de optimización cuya función objetivo es la varianza de los componentes principales.

Así, por ejemplo, dada la matriz de datos, denotada por R , de orden $n \times k$, el primer componente principal se define como:

$$\begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & \cdot & \cdot & r_{k1} \\ r_{12} & r_{22} & \cdot & \cdot & r_{k2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{1n} & r_{2n} & \cdot & \cdot & r_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{1,k} \end{pmatrix} \quad (3)$$

o alternativamente,

$$z_1 = R a_1$$

y la varianza de este componente,

$$Var(z_1) = \frac{1}{n} z_1' z_1 = \frac{1}{n} (R a_1)' R a_1$$

$$Var(z_1) = \frac{1}{n} a_1' R' R a_1 = a_1' S_R a_1$$

donde S_R es la matriz de varianzas y covarianzas muestral de la matriz de datos, que hemos denotada R . Teniendo en cuenta que es posible maximizar la varianza de z_1 sin límite al aumentar el módulo de a_1 , imponemos la siguiente restricción: $a_1' a_1 = 1$.

Así, el primer componente principal se obtiene del siguiente problema de optimización:

$$\text{Max } Var(z_1) = a_1' S_R a_1$$

$$\text{s.a. } a_1' a_1 = 1$$

3 Si los datos no están estandarizados, $b_{i,j}$, que denota el efecto que tiene sobre la variable i cambios en el componente j es igual a $a_{i,j}$, que denota el peso que la variable i tiene en el componente j .

cuyo Lagrangiano es:

$$L(a_1, \lambda) = a_1' S_R a_1 - \lambda(a_1' a_1 - 1)$$

con condición de optimalidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial a_1} &= 2S_R a_1 - 2\lambda a_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= a_1' a_1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

cuya solución satisface:

$$S_R a_1 = \lambda a_1$$

lo que significa que a_1 es un vector propio de la matriz S_R , y λ su correspondiente autovalor. Para determinar qué valor propio de S_R es la solución de la ecuación anterior, tendremos en cuenta que, multiplicando esta ecuación por a_1' obtenemos la varianza de z_1 , que es igual a λ :

$$a_1' S_R a_1 = \lambda a_1' a_1 = \text{var}(z_1) = \lambda$$

Por tanto, dado que el problema planteado tiene como objetivo maximizar la varianza del primer componente principal, λ será el mayor valor propio de S_R . Su vector propio asociado, a_1 , define las ponderaciones de cada variable en el primer componente principal.

En general, se puede demostrar análogamente que el espacio de dimensión p que mejor representa a los datos, viene definido por los vectores propios asociados a los p mayores autovalores de S_R . Estas direcciones se denominan direcciones principales de los datos y a las nuevas variables por ellas definidas, *componentes principales*. En general existen k componentes principales, que se obtendrán calculando los valores propios o raíces características de la matriz de varianzas y covarianzas de R , al resolver la ecuación característica:

$$|S_R - \lambda I_k| = 0$$

A partir de los autovalores se obtienen los autovectores.

Por tanto, los componentes principales son una combinación lineal de las variables originales, donde las ponderaciones que tiene cada variable vienen dadas por los coeficientes que definen los autovectores asociados a la matriz de varianzas y covarianzas de los datos estandarizados.

El análisis de componentes principales también nos permite determinar que parte de la varianza total de la matriz cuya información se quiere resumir, puede ser explicada por cada uno de los componentes principales de los datos. Concretamente, la proporción de varianza total explicada por el componente j viene dado por la expresión:

$$p_j = \frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^k \lambda_j}$$

donde λ_j es la varianza del componente j , y $\sum_{j=1}^k \lambda_j$ es la varianza total de la matriz de datos, que se obtiene como la suma de la varianza de cada una de las componentes principales asociadas a los datos. Ello se deriva de una de las propiedades que presentan los componentes principales, que es el hecho de que estos conservan la variabilidad inicial, es decir, que la suma de las varianzas de los componentes principales es igual a la suma de las varianzas de las variables incluidas en R .

REFERENCIAS

- Alexander, C., 2000. A primer on the orthogonal GARCH model. Manuscript ISMA Centre, The Business School for Financial Markets, University of Reading, UK.
- Barber, J. R. y Copper, M. L., 1996. Immunization using principal component analysis. *The Journal of Portfolio Management*, pp. 99-105.
- Chambers, D. R. y Carleton, W. T., 1988. A generalized approach to duration. *Research in Finance*, 7, JAI Press, Greenwich, CT, pp 163-181.
- Chambers, D. R., Carleton, W.T. y McEnally, R. W., 1988. Immunizing default-free bond portfolios with a duration vector. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, pp. 89-104.
- Cox, J.C., Ingersoll, J.E. y Ross, S.A., 1985. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53, pp. 385-407.
- Elton, E.J., Gruber, M. J. y Michaely, R., 1990. The structure of spot rates and immunization. *Journal of Finance*, 45, pp. 629-642.
- Fisher, L. y Weil, R. L., 1971. Coping with risk of interest rate fluctuations: returns to bondholders from naive and optimal strategies. *Journal of Business*, 4, pp. 408-431.
- Gómez, I., 1999. Aproximación al riesgo de precio de un activo de renta fija a través de un modelo de duración multifactorial paramétrico. VII Foro de Finanzas, Valencia (1999).
- Gómez, I. y Novales, A., 1997. “Estrategias de inmunización ante posibles desplazamientos en la Estructura Temporal”. *Analistas Financieros Internacionales*, enero, 1997.
- Litterman, R. y Scheinkman, J., 1991. “Common factor affecting bond returns”. *Journal of Fixed Income*, 1, pp. 54-61.
- Moreno, M., 1997. Risk management under a two-factor model of the term structure of interest rates. Documento de trabajo de la Universidad Pompeu Fabra (UPF).
- Navarro, E. y Nave, J. M., 1995. Análisis de los factores de riesgo en el mercado español de deuda pública. *Cuadernos Aragoneses de Economía*, 5, pp. 331-341.
- Navarro, E. y Nave, J.M., 1997. Modelo de duración bifactorial para la gestión del riesgo del tipo de interés. *Investigaciones Económicas*, 21, pp. 55-74.
- Navarro, E. y Nave, J.M., 2001. The structure of spot rates and immunization: some further results. *Spanish Economic Review*, 3, pp. 273-294.
- Nelson, C.R. y Siegel, A.F., 1987. Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business*, 60, pp. 473-489.
- Soto, G. M., 2001. Modelos de inmunización de carteras de renta fija. *Revista de Economía Aplicada*, 9, pp. 57-93.
- Vasicek, O., 1977. An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.